

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»  
Елабужский институт (филиал) КФУ



**УТВЕРЖДАЮ**

Заместитель директора по  
образовательной деятельности

С.Ю. Бахвалов

« 19 » 05 2025 г.

МП

**Программа дисциплины (модуля)**

*Алгебра*

Направление подготовки/специальность: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность (профиль) подготовки (специальности): Математика и физика

Квалификация: бакалавр

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: - 2025

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий
  - 4.1. Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)
  - 4.2. Содержание дисциплины (модуля)
5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)
6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)
7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)
11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)
12. Средства адаптации преподавания дисциплины (модуля) к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья
13. Приложение №1. Фонд оценочных средств
14. Приложение №2. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)
15. Приложение №3. Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Программу дисциплины разработал(а)(и) доцент, к.н. Созонтова Е.А. (Кафедра математики и прикладной информатики)

### 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения ОПОП ВО

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль), должен обладать следующими компетенциями:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
УК-2	Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений
УК-2.1	Знать требования к определению задач в рамках поставленной цели; базовые способы решения задач с учетом действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений
УК-2.2	Уметь определять основные и специфические задачи в рамках поставленной цели, выбирать способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений
УК-2.3	Владеть навыками определения круга задач в рамках поставленной цели, выбора оптимальных способов их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений
ОПК-8	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний
ОПК-8.2	Уметь осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний
ОПК-8.3	Владеть способностью осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний

Обучающийся, освоивший дисциплину (модуль):

Должен знать:

требования к определению задач в рамках поставленной цели; базовые способы решения задач алгебры с учетом действующих стандартов.

Должен уметь:

определять основные и специфические задачи в рамках поставленной цели, выявлять и анализировать различные способы решения задач алгебры и аргументировать их выбор; осуществлять эффективную педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний в области алгебры.

Должен владеть:

навыками определения основных и специфических задач в рамках поставленной цели, выбора рациональных способов решения задач алгебры;

способностью осуществлять эффективную педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний в области алгебры.

### 2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО

Данная дисциплина (модуль) включена в раздел "Б1.О.07.02 Дисциплины (модули)" основной профессиональной образовательной программы 44.03.05 "Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (Математика и физика)" и относится к обязательным дисциплинам. Осваивается на 1 курсе в 1, 2 семестрах.

### 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 зачетных(ые) единиц(ы) на 360 часа(ов).

Контактная работа - 196 часа(ов), в том числе лекции - 98 часа(ов), практические занятия - 98 часа(ов), лабораторные работы - 0 часа(ов), контроль самостоятельной работы - 0 часа(ов).

Самостоятельная работа - 92 часа(ов).

Контроль (зачёт / экзамен) - 72 часа(ов).

Форма промежуточного контроля дисциплины: экзамен в 1 семестре; экзамен в 2 семестре, контрольная работа в 1 семестре, контрольная работа во 2 семестре.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**4.1 Структура и тематический план контактной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю)**

N	Разделы дисциплины / модуля	Семестр	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
1.	Тема 1. Введение в алгебру	1	4	4	0	4
2.	Тема 2. Алгебраические системы	1	6	6	0	6
4.	Тема 3. Матрицы и определители	1	16	16	0	12
5.	Тема 4. Системы линейных уравнений	1	10	10	0	10
6.	Тема 5. Векторные пространства	1	10	10	0	10
7.	Тема 6. Линейные операторы	1	8	10	0	8
8.	Тема 7. Группы. Кольца	2	8	6	0	6
9.	Тема 8. Многочлены. Операции над многочленами	2	10	10	0	10
10.	Тема 9. Многочлены от одной переменной	2	10	10	0	10
11.	Тема 10. Многочлены от нескольких переменных	2	10	10	0	10
12.	Тема 11. Алгебраические и трансцендентные элементы	2	6	6	0	6
	Итого: 360 ч. (из них 72 ч. контроль)		98	98	0	92

**4.2 Содержание дисциплины (модуля)**

**Тема 1. Введение в алгебру**

Элементы алгебры логики. Высказывания. Основные логические операции. Логические формулы. Элементы теории множеств. Понятие множества. Операции над множествами. Отношения на множествах. отображения.

**Тема 2. Алгебраические системы**

Алгебраическая операция. Свойства операций. Понятие алгебры. Отношения. Понятие алгебраической системы (общая теория). Группы, кольца, поля. Простейшие свойства. Гомоморфизмы, изоморфизмы алгебр. Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Корни из комплексного числа.

**Тема 3. Матрицы и определители**

Матрицы. Операции над матрицами. Элементарные преобразования матрицы. Обратимые матрицы. Условия обратимости матрицы. Нахождение обратной матрицы. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы

Подстановки. Четные и нечетные подстановки. Определитель квадратной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке и столбцу. Определитель произведения матриц. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя. Приложения теории определителей. Методы вычисления определителей n-го порядка.

**Тема 4. Системы линейных уравнений**

Понятие векторного пространства, примеры. Арифметическое векторное пространство. Линейная зависимость и линейная независимость систем векторов. Базис и ранг конечной системы векторов. Базис и размерность векторного пространства. Системы линейных уравнений. Критерий совместности системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Формулы Крамера. Однородная система линейных уравнений. Фундаментальная система решений.

**Тема 5. Векторные пространства**

Векторные пространства. Матрица перехода от одного базиса к другому. Операции над подпространствами. Векторные пространства со скалярным умножением. Евклидово пространство. Ортогональная система векторов. Процесс ортогонализации. Норма вектора. Ортогональный и ортонормированный базис. Изоморфизм векторных и евклидовых пространств.

**Тема 6. Линейные операторы**

Линейные отображения векторных пространств и линейные операторы. Матрица линейного оператора. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах. Операции сложения, умножения линейных операторов, умножения оператора на скаляр. Образ и ядро линейного оператора. Невырожденные линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, их вычисление. Линейные операторы с простым спектром. Приведение матрицы к диагональному виду.

#### **Тема 7. Группы. Кольца**

Группы. Свойства групп. Подгруппы. Теорема Кэли. Порядок элемента группы и его свойства. Циклические группы и их подгруппы. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Нормальные делители. Фактор-группа. Гомоморфизмы групп. Ядро гомоморфизма. Теорема о гомоморфизмах групп.

Кольца. Свойства колец. Подкольца. Область целостности. Характеристика кольца с единицей. Идеалы кольца. Фактор-кольца. Кольца главных идеалов. Евклидовы и факториальные кольца.

#### **Тема 8. Многочлены. Операции над многочленами**

Общие свойства многочленов (определения, примеры). Многочлены от одной переменной. Многочлены от нескольких переменных. Алгебраические и трансцендентные элементы. Операции над многочленами (сложение, вычитание, умножение многочленов). Деление с остатком. Разложение многочлена по степеням разности. Наибольший общий делитель двух многочленов.

#### **Тема 9. Многочлены от одной переменной**

Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Корни многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера. Деление с остатком. Делимость многочленов. НОД и НОК. Неприводимые многочлены. Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Формальная производная многочлена. Неприводимые кратные множители многочлена. Кратные корни многочлена.

#### **Тема 10. Многочлены от нескольких переменных**

Кольцо многочленов от нескольких переменных. Степень многочлена. Лексикографическое упорядочение. Высший член многочлена и его свойства. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах. Формулы Виета. Результант. Исключение неизвестных из системы алгебраических уравнений.

Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Неприводимые над полем действительных чисел многочлены. Уравнения третьей и четвертой степени. Формулы Кардано. Приводимость многочленов над полем рациональных чисел. Целые и рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.

#### **Тема 11. Алгебраические и трансцендентные элементы**

Алгебраические и трансцендентные элементы. Минимальный многочлен алгебраического элемента. Расширения полей. Простое расширение. Простое алгебраическое расширение поля. Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби. Конечное, алгебраическое, составное алгебраическое, алгебраически порожденное расширения поля. Поле алгебраических чисел. Разрешимость уравнений в радикалах.

### **5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

Самостоятельная работа обучающихся выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.

Организация самостоятельной работы обучающихся регламентируется нормативными документами, учебно-методической литературой и электронными образовательными ресурсами, включая:

Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры (утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 6 апреля 2021 года № 245)

Устав федерального государственного автономного образовательного учреждения "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Правила внутреннего распорядка федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Локальные нормативные акты Казанского (Приволжского) федерального университета

### **6. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) включает оценочные материалы, направленные на проверку освоения компетенций, в том числе знаний, умений и навыков. Фонд оценочных средств включает оценочные средства текущего контроля и оценочные средства промежуточной аттестации.

В фонде оценочных средств содержится следующая информация:

- соответствие компетенций планируемым результатам обучения по дисциплине (модулю);
- критерии оценивания сформированности компетенций;
- механизм формирования оценки по дисциплине (модулю);
- описание порядка применения и процедуры оценивания для каждого оценочного средства;
- критерии оценивания для каждого оценочного средства;
- содержание оценочных средств, включая требования, предъявляемые к действиям обучающихся, демонстрируемым результатам, задания различных типов.

Фонд оценочных средств по дисциплине находится в Приложении 1 к программе дисциплины (модулю).

### 7. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Освоение дисциплины (модуля) предполагает изучение основной и дополнительной учебной литературы. Литература может быть доступна обучающимся в одном из двух вариантов (либо в обоих из них):

- в электронном виде - через электронные библиотечные системы на основании заключенных КФУ договоров с правообладателями;

- в печатном виде - в Научной библиотеке Елабужского института КФУ.. Обучающиеся получают учебную литературу на абонементе по читательским билетам в соответствии с правилами пользования Научной библиотекой.

Электронные издания доступны дистанционно из любой точки при введении обучающимся своего логина и пароля от личного кабинета в системе "Электронный университет". При использовании печатных изданий библиотечный фонд должен быть укомплектован ими из расчета не менее 0,25 экземпляра на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих данную дисциплину.

Перечень учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля), находится в Приложении 2 к рабочей программе дисциплины. Он подлежит обновлению при изменении условий договоров КФУ с правообладателями электронных изданий и при изменении комплектования фондов Научной библиотеки Елабужского института КФУ.

### 8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Математический портал - <http://mathportal.net/>

Общероссийский математический портал - <http://www.mathnet.ru/>

Энциклопедия Кругосвет - [https://www.krugosvet.ru/enc/nauka\\_i\\_tehnika/matematika/ALGEBRA.html](https://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/ALGEBRA.html)

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Вид работ	Методические рекомендации
лекции	Лекционные занятия проводятся с использованием интерактивных технологий и предполагают активное участие студентов. Для подготовки к занятиям рекомендуется выделять в материале проблемные вопросы, затрагиваемые преподавателем в лекции, и группировать информацию вокруг них. Желательно выделять в используемой литературе постановки вопросов, на которые разными авторам могут быть даны различные ответы. На основании постановки таких вопросов следует собирать аргументы в пользу различных вариантов решения поставленных проблем.
практические занятия	Перед практическим занятием следует изучить конспект лекции и рекомендованную преподавателем литературу, обращая внимание на практическое применение теории и на методику решения типовых задач. На практическом занятии главное - уяснить связь решаемых задач с теоретическими положениями. При решении предложенной задачи нужно стремиться не только получить правильный ответ, но и усвоить общий метод решения подобных задач.
самостоятельная работа	Самостоятельная работа подразделяется на самостоятельную работу на аудиторных занятиях и на внеаудиторную самостоятельную работу. Самостоятельная работа обучающихся включает как полностью самостоятельное освоение отдельных тем (разделов) дисциплины, так и проработку тем (разделов), осваиваемых во время аудиторной работы. Во время самостоятельной работы обучающиеся читают и конспектируют учебную, научную и справочную литературу, выполняют задания, направленные на закрепление знаний и отработку умений и навыков, готовятся к текущему и промежуточному контролю по дисциплине.
экзамен	Экзамен по курсу проводится по билетам. В каждом билете один теоретический вопрос и одна задача. После ответа студенту могут быть заданы дополнительные вопросы, как по материалам

билета, так и по основным определениям курса в целом. При подготовке к экзамену необходимо опираться, прежде всего, на конспекты лекций и рекомендованные источники информации, весь объём работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведённым для подготовки к экзамену и контролировать каждый день выполнения работы.
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем, представлен в Приложении 3 к рабочей программе дисциплины (модуля).

**11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория № 88 (423600, Республика Татарстан, г. Елабуга, ул. Казанская, д. 89) для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Комплект мебели (посадочных мест) 36 шт. Комплект мебели (посадочных мест) для преподавателя 1 шт. Интерактивная трибуна Panasonic VX400 1 шт. Монитор LG,22d 1 шт. Проектор Panasonic VX400 1 шт. Колонки 20w 6 шт. Усилитель 3000w, микшер Xenyx1202, микрофоны. Экран мультимедийный 1 шт. Меловая доска настенная 1 шт. Стенды настенные 6 шт. Веб-камера 1 шт. Выход в Интернет, внутривузовская компьютерная сеть, доступ в электронную информационно-образовательную среду. Набор учебно-наглядных пособий: комплект презентаций в электронном формате по преподаваемой дисциплине 3-5 шт.

Учебная аудитория № 81 (423600, Республика Татарстан, г. Елабуга, ул. Казанская, д. 89) для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.. Комплект мебели (посадочных мест) 40 шт. Комплект мебели (посадочных мест) для преподавателя 1 шт. Меловая доска настенная 1 шт. Интерактивная трибуна intel core i3 1 шт. Мультимедийный экран 1 шт. Монитор LG,22d 1 шт. Проектор EPSON EB-980W 1 шт. Колонки 20w 6 шт. Усилитель 3000w, микшер Xenyx1202, микрофоны. Портреты 5 шт. Веб-камера 1 шт. Выход в Интернет, внутривузовская компьютерная сеть, доступ в электронную информационно-образовательную среду. Набор учебно-наглядных пособий: комплект презентаций в электронном формате по преподаваемой дисциплине 3-5 шт.

Учебная аудитория № 69 (423600, Республика Татарстан, г. Елабуга, ул. Казанская, д. 89) для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Комплект мебели (посадочных мест) 36 шт. Комплект мебели (посадочных мест) для преподавателя 1 шт. Интерактивная трибуна intel core i3 1 шт. Проектор Panasonic VX400 1 шт. Экран мультимедийный 1 шт. Колонки 20w 6 шт. Усилитель 3000w, микшер Xenyx1202, микрофоны. Доска меловая настенная 1 шт. Картины 19 шт. Веб-камера 1 шт. Набор учебно-наглядных пособий: комплект презентаций в электронном формате по преподаваемой дисциплине 3-5 шт. Выход в Интернет, внутривузовская компьютерная сеть, доступ в электронную информационно-образовательную среду.

Учебная аудитория № 86 (423600, Республика Татарстан, г. Елабуга, ул. Казанская, д. 89) для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Комплект мебели (посадочных мест) 100 шт. Комплект мебели (посадочных мест) для преподавателя 1 шт. Меловая доска настенная 1 шт. Интерактивная трибуна intel core i3 1 шт. Монитор LG,22d 1 шт. Проектор Panasonic VX400 1 шт. Колонки 20w 6 шт. Усилитель 3000w, микшер Xenyx1202, микрофоны, Портреты 12 шт. Веб-камера. Выход в Интернет, внутривузовская компьютерная сеть, доступ в электронную информационно-образовательную среду. Набор учебно-наглядных пособий: комплект презентаций в электронном формате по преподаваемой дисциплине 3-5 шт.

Учебная аудитория № 78 (423600, Республика Татарстан, г. Елабуга, ул. Казанская, д. 89) для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. (Зал судебных заседаний). Комплект мебели (посадочных мест) 36 шт. Комплект мебели (посадочных мест) для преподавателя 1 шт. Трибуна 1 шт. Меловая доска передвижная 1 шт. Парты 4 шт. Судебные кресла 3 шт. Флаги 2 шт. Стенды 6 шт. Стол большой 1 шт. Ноутбук ICL Pi155 1 шт. Веб-камера 1 шт. Выход в Интернет, внутривузовская компьютерная сеть, доступ в электронную информационно-образовательную среду. Набор учебно-наглядных пособий: комплект презентаций в электронном формате по преподаваемой дисциплине 3-5 шт.

Учебная аудитория № 88 (423600, Республика Татарстан, г. Елабуга, ул. Казанская, д. 89) для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Комплект мебели (посадочных мест) 28 шт. Комплект мебели (посадочных мест) для преподавателя 1 шт. Трибуна 1 шт. Меловая доска настенная 2 шт. Ноутбук ICL Pi155 1 шт. Веб-камера 1 шт. Выход в Интернет, внутривузовская компьютерная сеть, доступ в электронную информационно-

образовательную среду. Набор учебно-наглядных пособий: комплект презентаций в электронном формате по преподаваемой дисциплине 3-5 шт.

Учебная аудитория № 84 (423600, Республика Татарстан, г. Елабуга, ул. Казанская, д. 89) для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Комплект мебели (посадочных мест) 62 шт. Комплект мебели (посадочных мест) для преподавателя 1 шт. Интерактивная трибуна intel core i3 1 шт. Монитор LG,22d 1 шт. Проектор Panasonic VX400 1 шт. Колонки 20w 6 шт. Усилитель 3000w, микшер Xenyx1202, микрофоны. Экран мультимедийный 1 шт. Меловая доска настенная 1 шт. Портреты 10 шт. Картины 20 шт. Веб-камера 1 шт. Выход в Интернет, внутривизовская компьютерная сеть, доступ в электронную информационно-образовательную среду. Набор учебно-наглядных пособий: комплект презентаций в электронном формате по преподаваемой дисциплине 3-5 шт.

## **12. Средства адаптации преподавания дисциплины к потребностям обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья**

При необходимости в образовательном процессе применяются следующие методы и технологии, облегчающие восприятие информации обучающимися инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья:

- создание текстовой версии любого нетекстового контента для его возможного преобразования в альтернативные формы, удобные для различных пользователей;

- создание контента, который можно представить в различных видах без потери данных или структуры, предусмотреть возможность масштабирования текста и изображений без потери качества, предусмотреть доступность управления контентом с клавиатуры;

- создание возможностей для обучающихся воспринимать одну и ту же информацию из разных источников - например, так, чтобы лица с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения - аудиально;

- применение программных средств, обеспечивающих возможность освоения навыков и умений, формируемых дисциплиной, за счёт альтернативных способов, в том числе виртуальных лабораторий и симуляционных технологий;

- применение дистанционных образовательных технологий для передачи информации, организации различных форм интерактивной контактной работы обучающегося с преподавателем, в том числе вебинаров, которые могут быть использованы для проведения виртуальных лекций с возможностью взаимодействия всех участников дистанционного обучения, проведения семинаров, выступления с докладами и защиты выполненных работ, проведения тренингов, организации коллективной работы;

- применение дистанционных образовательных технологий для организации форм текущего и промежуточного контроля;

- увеличение продолжительности сдачи обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья форм промежуточной аттестации по отношению к установленной продолжительности их сдачи:

- продолжительности сдачи зачёта или экзамена, проводимого в письменной форме, - не более чем на 90 минут;

- продолжительности подготовки обучающегося к ответу на зачёте или экзамене, проводимом в устной форме, - не более чем на 20 минут;

- продолжительности выступления обучающегося при защите курсовой работы - не более чем на 15 минут.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО и учебным планом по направлению 44.03.05 "Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)" и профилю подготовки "Математика и физика".

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Елабужский институт (филиал)

**Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)  
Б1.О.07.02 Алгебра**

Направление подготовки: 44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Профиль подготовки: Математика и физика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

- 1. СООТВЕТСТВИЕ КОМПЕТЕНЦИЙ ПЛАНИРУЕМЫМ РЕЗУЛЬТАТАМ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**
- 2. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ**
- 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНОК ЗА ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНУЮ АТТЕСТАЦИЮ**

### **4. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА, ПОРЯДОК ИХ ПРИМЕНЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ**

#### 4.1. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

##### *4.1.1. Устный опрос.*

4.1.1.1. Порядок проведения и процедура оценивания.

4.1.1.2 Критерии оценивания

4.1.1.3. Содержание оценочного средства

##### *4.1.2. Контрольная работа.*

4.1.2.1. Порядок проведения и процедура оценивания.

4.1.2.2 Критерии оценивания

4.1.2.3. Содержание оценочного средства

#### 4.2. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### **ЭКЗАМЕН**

##### *4.2.1. Устный или письменный ответ на вопрос*

4.2.1.1. Порядок проведения и процедура оценивания.

4.2.1.2. Критерии оценивания.

4.2.1.3. Оценочные средства

##### *4.2.2. Решение задачи*

4.2.2.1. Порядок проведения и процедура оценивания.

4.2.2.2. Критерии оценивания.

4.2.2.3. Оценочные средства

**1. СООТВЕТСТВИЕ КОМПЕТЕНЦИЙ ПЛАНИРУЕМЫМ РЕЗУЛЬТАТАМ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций для данной дисциплины	Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации
<p>УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений</p>	<p>Знать требования к определению задач в рамках поставленной цели; базовые способы решения задач алгебры с учетом действующих стандартов</p> <p>Уметь определять основные и специфические задачи в рамках поставленной цели, выявлять и анализировать различные способы решения задач алгебры и аргументировать их выбор</p> <p>Владеть навыками определения основных и специфических задач в рамках поставленной цели, выбора рациональных способов решения задач алгебры</p>	<p><b>Текущий контроль:</b>  <u>Устный опрос</u> по темам:            Тема 1. Введение в алгебру.            Тема 2. Алгебраические системы.            Тема 3. Матрицы и определители.            Тема 4. Системы линейных уравнений.            Тема 5. Векторные пространства.            Тема 6. Линейные операторы.            Тема 7. Группы. Кольца.            Тема 8. Многочлены. Операции над многочленами.            Тема 9. Многочлены от одной переменной.            Тема 10. Многочлены от нескольких переменных.            Тема 11. Алгебраические и трансцендентные элементы.</p> <p><u>Контрольная работа</u> по темам:            Тема 1. Введение в алгебру.            Тема 2. Алгебраические системы.            Тема 3. Матрицы и определители.            Тема 4. Системы линейных уравнений.            Тема 5. Векторные пространства.            Тема 6. Линейные операторы.            Тема 7. Группы. Кольца.            Тема 8. Многочлены. Операции над многочленами.            Тема 9. Многочлены от одной переменной.            Тема 10. Многочлены от нескольких переменных.            Тема 11. Алгебраические и трансцендентные элементы.</p> <p><b>Промежуточная аттестация:</b>  <i>Экзамен</i></p>
<p>ОПК-8 Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний</p>	<p>Уметь осуществлять эффективную педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний в области алгебры</p> <p>Владеть способностью осуществлять эффективную педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний в области алгебры</p>	<p><b>Текущий контроль:</b>  <u>Устный опрос</u> по темам:            Тема 1. Введение в алгебру.            Тема 2. Алгебраические системы.            Тема 3. Матрицы и определители.            Тема 4. Системы линейных уравнений.            Тема 5. Векторные пространства.            Тема 6. Линейные операторы.            Тема 7. Группы. Кольца.            Тема 8. Многочлены. Операции над многочленами.            Тема 9. Многочлены от одной переменной.            Тема 10. Многочлены от нескольких переменных.            Тема 11. Алгебраические и трансцендентные элементы.</p> <p><u>Контрольная работа</u> по темам:            Тема 1. Введение в алгебру.            Тема 2. Алгебраические системы.            Тема 3. Матрицы и определители.            Тема 4. Системы линейных уравнений.            Тема 5. Векторные пространства.            Тема 6. Линейные операторы.            Тема 7. Группы. Кольца.            Тема 8. Многочлены. Операции над многочленами.            Тема 9. Многочлены от одной переменной.            Тема 10. Многочлены от нескольких переменных.            Тема 11. Алгебраические и трансцендентные элементы.</p>

		<b>Промежуточная аттестация:</b> <i>Экзамен</i>
--	--	----------------------------------------------------

## 2. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ

Компетенция	Зачтено		Не зачтено	
	Высокий уровень (отлично) (86-100 баллов)	Средний уровень (хорошо) (71-85 баллов)	Низкий уровень (удовлетворительно) (56-70 баллов)	Ниже порогового уровня (неудовлетворительно) (0-55 баллов)
УК-2	Знает требования к определению задач в рамках поставленной цели; базовые способы решения задач алгебры с учетом действующих стандартов	Знает основные требования к определению задач в рамках поставленной цели; базовые способы решения задач алгебры с учетом действующих стандартов. Допускает незначительные ошибки при ответе на вопрос или решении поставленной задачи	Знает отдельные требования к определению задач в рамках поставленной цели; базовые способы решения задач алгебры с учетом действующих стандартов. Допускает типичные ошибки при ответе на вопрос или решении поставленной задачи	Не знает требования к определению задач в рамках поставленной цели; базовые способы решения задач алгебры с учетом действующих стандартов
	Умеет определять основные и специфические задачи в рамках поставленной цели, выявлять и анализировать различные способы решения задач алгебры и аргументировать их выбор	Умеет определять основные и специфические задачи в рамках поставленной цели, выявлять и анализировать основные способы решения задач алгебры. Допускает незначительные ошибки при ответе на вопрос или решении поставленной задачи	Умеет определять основные задачи в рамках поставленной цели, выявлять и анализировать основные способы решения задач алгебры и аргументировать их выбор. Допускает типичные ошибки при ответе на вопрос или решении поставленной задачи.	Не умеет определять основные и специфические задачи в рамках поставленной цели, выявлять и анализировать различные способы решения задач алгебры и аргументировать их выбор
	Владеет навыками определения основных и специфических задач в рамках поставленной цели, выбора рациональных способов решения задач алгебры	Владеет основными навыками определения специфических задач в рамках поставленной цели, выбора рациональных способов решения задач алгебры. Допускает незначительные ошибки при ответе на вопрос или решении поставленной задачи	Владеет отдельными навыками определения основных задач в рамках поставленной цели, выбора рациональных способов решения задач алгебры. Допускает типичные ошибки при ответе на вопрос или решении поставленной задачи	Не владеет навыками определения основных и специфических задач в рамках поставленной цели, выбора рациональных способов решения задач алгебры
ОПК-8	Умеет осуществлять эффективную педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний в области алгебры	Умеет осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний в области алгебры. Допускает незначительные ошибки при ответе на вопрос или решении поставленной задачи	Умеет осуществлять по заданным правилам педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний в области алгебры. Допускает типичные ошибки при ответе на вопрос или решении поставленной задачи	Не умеет осуществлять эффективную педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний в области алгебры

	Владеет способностью осуществлять эффективную педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний в области алгебры	Владеет способностью осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний в области алгебры. Допускает незначительные ошибки при ответе на вопрос или решении поставленной задачи	Владеет способностью осуществлять педагогическую деятельность по заданным правилам на основе специальных научных знаний в области алгебры. Допускает типичные ошибки при ответе на вопрос или решении поставленной задачи	Не владеет способностью осуществлять эффективную педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний в области алгебры
--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНОК ЗА ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНУЮ АТТЕСТАЦИЮ

1 семестр.

#### Текущий контроль:

Устный опрос. Тема 1. Введение в алгебру. Тема 2. Алгебраические системы. Тема 3. Матрицы и определители. Тема 4. Системы линейных уравнений. Тема 5. Векторные пространства. Тема 6. Линейные операторы.

Максимальное количество баллов по БРС - 20.

Контрольная работа. Тема 2. Алгебраические системы. Тема 3. Матрицы и определители. Тема 4. Системы линейных уравнений. Тема 5. Векторные пространства. Тема 6. Линейные операторы.

Максимальное количество баллов по БРС - 30.

Итого  $30+20=50$  баллов.

**Промежуточная аттестация** - экзамен- 50 баллов.

2 семестр.

#### Текущий контроль:

Устный опрос. Тема 7. Группы. Кольца. Тема 8. Многочлены. Операции над многочленами. Тема 9. Многочлены от одной переменной. Тема 10. Многочлены от нескольких переменных. Тема 11. Алгебраические и трансцендентные элементы.

Максимальное количество баллов по БРС - 20.

Контрольная работа. Тема 7. Группы. Кольца. Тема 8. Многочлены. Операции над многочленами. Тема 9. Многочлены от одной переменной. Тема 10. Многочлены от нескольких переменных. Тема 11. Алгебраические и трансцендентные элементы.

Максимальное количество баллов по БРС - 30.

Итого  $30+20=50$  баллов.

**Промежуточная аттестация** - экзамен- 50 баллов.

Промежуточная аттестация проводится после завершения изучения дисциплины или ее части в форме, определяемой учебным планом образовательной программы с целью оценить работу обучающегося, степень усвоения теоретических знаний, уровень сформированности компетенций.

Преподаватель, принимающий экзамен, обеспечивает случайное распределение вариантов экзаменационных заданий между обучающимися с помощью билетов и/или с применением компьютерных технологий; вправе задавать обучающемуся дополнительные вопросы и давать дополнительные задания помимо тех, которые указаны в билете.

Экзамен проводится по билетам. В каждом билете два оценочных средства:

1) устный или письменный ответ на вопрос;

2) решение задачи.

Устный или письменный ответ – 20 баллов.

Решение задачи – 30 баллов.

Итого  $20+30=50$  баллов.

Общее количество баллов по дисциплине за текущий контроль и промежуточную аттестацию:  $50+50=100$  баллов.

Для экзамена:

86-100 – отлично

71-85 – хорошо

56-70 – удовлетворительно

0-55 – неудовлетворительно

### 4. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА, ПОРЯДОК ИХ ПРИМЕНЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

## **4.1. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ**

**4.1.1. Устный опрос.** Тема 1. Введение в алгебру. Тема 2. Алгебраические системы. Тема 3. Матрицы и определители. Тема 4. Системы линейных уравнений. Тема 5. Векторные пространства. Тема 6. Линейные операторы. Тема 7. Группы. Кольца. Тема 8. Многочлены. Операции над многочленами. Тема 9. Многочлены от одной переменной. Тема 10. Многочлены от нескольких переменных. Тема 11. Алгебраические и трансцендентные элементы.

### **4.1.1.1. Порядок проведения и процедура оценивания.**

Устный опрос проводится на практических занятиях. Обучающиеся выступают с докладами, сообщениями, дополнениями, участвуют в дискуссии, отвечают на вопросы преподавателя. Оценивается уровень домашней подготовки по теме, способность системно и логично излагать материал, анализировать, формулировать собственную позицию, отвечать на дополнительные вопросы.

### **4.1.1.2 Критерии оценивания**

#### **17-20 баллов ставится, если обучающийся:**

В ответе качественно раскрыл содержание темы. Ответ хорошо структурирован. Прекрасно освоен понятийный аппарат. Продемонстрирован высокий уровень понимания материала. Превосходное умение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения.

#### **14-16 баллов ставится, если обучающийся:**

Основные вопросы темы раскрыл. Структура ответа в целом адекватна теме. Хорошо освоен понятийный аппарат. Продемонстрирован хороший уровень понимания материала. Хорошее умение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения.

#### **11-13 баллов ставится, если обучающийся:**

Тему частично раскрыл. Ответ слабо структурирован. Понятийный аппарат освоен частично. Понимание отдельных положений из материала по теме. Удовлетворительное умение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения.

#### **0--10 баллов ставится, если обучающийся:**

Тему не раскрыл. Понятийный аппарат освоен неудовлетворительно. Понимание материала фрагментарное или отсутствует. Неумение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения.

### **4.1.1.3. Содержание оценочного средства**

#### **1 семестр.**

#### **Темы 1-6.**

Вопросы:

1. Логические операции.
2. Кванторы и предикаты.
3. Операции над множествами.
4. Отношения на множествах.
5. Отображение множеств.
6. Алгебраическая операция.
7. Свойства операций.
8. Понятие алгебры.
9. Отношения.
10. Понятие алгебраической системы.
11. Группы, кольца, поля.
12. Гомоморфизмы, изоморфизмы алгебр.
13. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.
14. Корни из комплексного числа.
15. Матрицы.
16. Операции над матрицами.
17. Элементарные преобразования матрицы.
18. Обратимые матрицы.
19. Условия обратимости матрицы.
20. Ранг матрицы.
21. Подстановки. Четные и нечетные подстановки.
22. Определитель квадратной матрицы.
23. Миноры и алгебраические дополнения.
24. Разложение определителя по строке и столбцу.
25. Определитель произведения матриц.
26. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.
27. Приложения теории определителей.

28. Методы вычисления определителей  $n$ -го порядка.
29. Понятие векторного пространства, примеры.
30. Арифметическое векторное пространство.
31. Линейная зависимость и линейная независимость систем векторов.
32. Базис и ранг конечной системы векторов.
33. Базис и размерность векторного пространства.
34. Системы линейных уравнений.
35. Метод Гаусса.
36. Метод Крамера.
37. Критерий совместности системы линейных уравнений.
38. Однородная система линейных уравнений.
39. Фундаментальная система решений.
40. Векторные пространства.
41. Матрица перехода от одного базиса к другому.
42. Операции над подпространствами.
43. Векторные пространства со скалярным умножением.
44. Евклидово пространство.
45. Ортогональная система векторов.
46. Процесс ортогонализации.
47. Норма вектора.
48. Ортогональный и ортонормированный базис.
49. Изоморфизм векторных и евклидовых пространств.
50. Линейные отображения векторных пространств и линейные операторы.
51. Матрица линейного оператора.
52. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах.
53. Операции сложения, умножения линейных операторов, умножения оператора на скаляр.
54. Образ и ядро линейного оператора.
55. невырожденные линейные операторы.
56. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, их вычисление.
57. Линейные операторы с простым спектром.
58. Приведение матрицы к диагональному виду.

## **2 семестр.**

### **Темы 7-11.**

Вопросы:

1. Группы. Свойства групп.
2. Подгруппы.
3. Теорема Кэли.
4. Порядок элемента группы и его свойства.
5. Циклические группы и их подгруппы.
6. Смежные классы.
7. Нормальные делители.
8. Фактор-группа.
9. Гомоморфизмы групп.
10. Кольца. Свойства колец.
11. Подкольца.
12. Область целостности.
13. Характеристика кольца с единицей.
14. Идеалы кольца.
15. Фактор-кольца.
16. Кольца главных идеалов.
17. Евклидовы и факториальные кольца.
18. Кольцо многочленов от одной переменной над полем.
19. Корни многочлена.
20. Теорема Безу.
21. Схема Горнера.
22. Делимость многочленов.
23. НОД и НОК.
24. неприводимые многочлены.
25. Формальная производная многочлена.
26. неприводимые кратные множители многочлена.
27. Кратные корни многочлена.
28. Кольцо многочленов от нескольких переменных.

29. Степень многочлена.
30. Лексикографическое упорядочение.
31. Высший член многочлена и его свойства.
32. Симметрические многочлены.
33. Основная теорема о симметрических многочленах.
34. Формулы Виета.
35. Результат.
36. Исключение неизвестных из системы алгебраических уравнений.
37. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
38. Неприводимые над полем действительных чисел многочлены.
39. Уравнения третьей и четвертой степени.
40. Формулы Кардано.
41. Приводимость многочленов над полем рациональных чисел.
42. Целые и рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.
43. Алгебраические и трансцендентные элементы.
44. Минимальный многочлен алгебраического элемента.
45. Расширения полей. Простое расширение.
46. Простое алгебраическое расширение поля.
47. Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби.
48. Конечное, алгебраическое, составное алгебраическое, алгебраически порожденное расширения поля.
49. Поле алгебраических чисел.
50. Разрешимость уравнений в радикалах.

**4.1.2. Контрольная работа.** Тема 2. Алгебраические системы. Тема 3. Матрицы и определители. Тема 4. Системы линейных уравнений. Тема 5. Векторные пространства. Тема 6. Линейные операторы. Тема 7. Группы. Кольца. Тема 8. Многочлены. Операции над многочленами. Тема 9. Многочлены от одной переменной. Тема 10. Многочлены от нескольких переменных. Тема 11. Алгебраические и трансцендентные элементы.

#### 4.1.2.1. Порядок проведения и процедура оценивания.

Контрольная работа проводится в часы аудиторной работы. Обучающиеся получают задания для проверки усвоения пройденного материала. Работа выполняется в письменном виде и сдается преподавателю. Оцениваются владение материалом по теме работы, аналитические способности, владение методами, умения и навыки, необходимые для выполнения заданий.

#### 4.1.2.2 Критерии оценивания

**26-30 баллов ставится, если обучающийся:**

Правильно выполнил все задания. Проявил высокий уровень владения материалом. Проявлены превосходные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

**21-25 баллов ставится, если обучающийся:**

Правильно выполнил большую часть заданий. Присутствуют незначительные ошибки. Проявлен хороший уровень владения материалом. Проявлены средние способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

**17-20 баллов ставится, если обучающийся:**

Задания выполнил более чем наполовину. Присутствуют серьезные ошибки. Проявлен удовлетворительный уровень владения материалом. Проявлены низкие способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

**0--16 баллов ставится, если обучающийся:**

Задания выполнил менее чем наполовину. Проявлен неудовлетворительный уровень владения материалом. Проявлены недостаточные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.

#### 4.1.2.3. Содержание оценочного средства 1 семестр.

##### Тема 2.

##### Вариант 1.

1. Образуется ли группа множество чисел вида  $a + b\sqrt{5}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  относительно сложения чисел?

2. Вычислить  $\frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$ .

3. Решить уравнение  $(3+i)x^2 + (1-i)x - 6i = 0$ .

4. Вычислить  $\sqrt[6]{(2+2i)^2(-\sqrt{3}+i)}$ .

5. Выразить  $\cos 3x, \sin 3x, \operatorname{tg} 3x$  через  $\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x$ , используя формулу Муавра.

### Вариант 2.

1. Образует ли группу множество чисел вида  $a + b\sqrt{5}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  относительно сложения чисел?

2. Найти  $f(i)$ , если  $f(x) = x^{17} - 5x^{14} + 10x^7 + 9x^5 - 4$ .

3. Вычислить  $\sqrt{-7+24i}$ .

4. Вычислить  $\sqrt[5]{\frac{-1+i}{(\sqrt{3}+i)^2}}$ .

5. Решить уравнение относительно действительных неизвестных  $x, y$ :

$$(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i.$$

### Тема 3.

#### Вариант 1.

1. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -10 \end{vmatrix}$

а) разложением по второй строке;

б) понижением порядка.

2. Найти обратную матрицу двумя способами:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Решите уравнение в подстановках:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ .

4. Вычислите определитель:  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 9 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ ;

#### Вариант 2.

1. Вычислить  $X = 2A^2 - 3A^{-1}$ , где  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

а) разложением по первому столбцу;

б) приведением к треугольному виду.

3. Найти обратную матрицу двумя способами:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

4. Решить систему уравнений по правилу Крамера: 
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

#### Тема 4.

##### **Вариант 1.**

1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

2. Найти вектор  $x$  из уравнения  $3(a_1 - x) + 2(a_2 + x) = 5(a_3 + x)$ , где

$$a_1 = (2, 5, 1), a_2 = (10, 1, 5), a_3 = (4, 1, -1).$$

3. Найти ранг матрицы 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти координаты вектора  $a = (5, 1, -3)$  в базисе  $e_1 = (1, 2, 0), e_2 = (2, 0, -1), e_3 = (1, -1, 0)$ .

##### **Вариант 2.**

1. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}.$$

2. Выясните, является ли следующая система векторов линейно зависимой или линейно независимой  $a_1 = (4; -5; 2; 6), a_2 = (2; -2; 1; 3), a_3 = (6; -3; 3; 9), a_4 = (4; -1; 5; 6)$ .

3. Найдите какой-нибудь базис системы векторов и выразите через этот базис остальные векторы системы  $a_1 = (1; 2; 3; -4), a_2 = (2; 3; -4; 1), a_3 = (2; -5; 8; -3), a_4 = (5; 26; -9; -12), a_5 = (3; -4; 1; 2)$ .

4. Найдите фундаментальную систему решений: 
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

#### Тема 5.

##### **Вариант 1.**

1. Найти размерности суммы и пересечения двух подпространств:

$L_1$ , натянутого на векторы  $a_1, a_2, a_3$  и  $L_2$ , натянутого на векторы  $b_1, b_2, b_3$ ,

$$a_1 = (1, 2, 1, -1), a_2 = (2, 3, 1, 0), a_3 = (1, 2, 2, -3),$$

$$b_1 = (1, 1, 1, 1), b_2 = (1, 0, 1, -1), b_3 = (1, 3, 0, -4).$$

2. Построить ортогональный базис подпространства, натянутого на заданную систему векторов:  $a_1 = (1, 1, -1, -2), a_2 = (-2, 1, 5, 11), a_3 = (0, 3, 3, 7), a_4 = (3, -3, -3, -9)$ .

3. Найти матрицу перехода от базиса  $a_1, a_2, a_3$  к базису  $b_1, b_2, b_3$  и обратно:

$$a_1 = (1, -1, 0), a_2 = (1, 2, 3), a_3 = (0, 1, -1),$$

$$b_1 = (3, -1, 4), b_2 = (1, -2, -5), b_3 = (3, -2, -1).$$

4. Является ли векторным пространством над  $\mathbb{R}$  множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ 2b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \text{ относительно сложения матриц и умножения матриц на число.}$$

##### **Вариант 2.**

1. Дополнить систему векторов  $a_1, a_2$  до ортогонального базиса пространства  $\mathbb{R}^4$ :

$$a_1 = (1, -2, 1, 3), a_2 = (2, 1, -3, 1).$$

2. Найти размерность и базис линейной оболочки системы векторов:

$a_1 = (1,1,1,1, 0)$ ,  $a_2 = (1,1,-1,-1-1)$ ,  $a_3 = (2,2,0,0,-1)$ ,  $a_4 = (1,1,5,5,2)$ ,  $a_5 = (1,-1,-1,0,0)$ . Дополнить этот базис до базиса всего пространства.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Дана матрица перехода от одного базиса к другому и координаты вектора  $a = (2,1,-2)$  в первом базисе, координаты вектора  $b = (1,0,3)$  во втором базисе. Найти координаты вектора  $a$  во втором, вектора  $b$  в первом базисе.

4. Найти размерности суммы и пересечения подпространств, натянутых:

$L_1$  на  $a_1, a_2, a_3$ ,  $L_2$  на  $b_1, b_2$ :

$a_1 = (0,1,1,1)$ ,  $a_2 = (1,1,1,2)$ ,  $a_3 = (-2,0,1,1)$ ,  $b_1 = (-1,3,2,-1)$ ,  $b_2 = (1,1,0,-1)$ .

### Тема 6.

#### Вариант 1.

1. Показать, что оператор  $\psi$ , переводящий вектор  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в вектор  $x' = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$  является линейным и найти его матрицу в базисе  $e_1 = (1,0,0)$ ,  $e_2 = (0,1,0)$ ,  $e_3 = (0,0,1)$ . Найти базис ядра этого оператора.

2. Линейный оператор  $\varphi$  в базисе  $\bar{a}_1 = (2,1)$ ;  $\bar{a}_2 = (3,2)$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ , линейный оператор  $\psi$  в базисе

$\bar{b}_1 = (4,2)$ ;  $\bar{b}_2 = (7,4)$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу линейного оператора  $\varphi + \psi$  в базисе  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ .

3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе

матрицей  $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ .

#### Вариант 2.

1. Найдите матрицу линейного оператора, переводящего векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  соответственно в  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  относительно базиса  $\bar{l}_1 = (1,0)$ ,  $\bar{l}_2 = (0,1)$ , где  $\bar{a}_1 = (1,1)$ ,  $\bar{b}_1 = (1,2)$ ,  $\bar{a}_2 = (0,1)$ ,  $\bar{b}_2 = (2,1)$ .

2. Линейный оператор  $\varphi$  в базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$  имеет матрицу  $A_\varphi$ . Найти матрицу этого оператора в базисе  $e_3, e_4, e_1, e_2$ .

$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

3. Приводится ли матрица  $A$  к диагональному виду:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ?

### 2 семестр.

### Тема 7.

#### Вариант 1.

1. Образует ли группу множество чисел  $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  относительно умножения чисел?

2. В мультипликативной группе комплексных чисел построить циклическую подгруппу, порожденную числом

$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  и найти порядок этого элемента.

3. Доказать, что множество  $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R \right\}$  скалярных матриц второго порядка относительно операций сложения и умножения матриц является ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей.
4. Делится ли  $-19 + 10\sqrt[3]{2} + 20\sqrt[3]{4}$  на  $1 - 3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{4}$  в кольце  $Z[\sqrt[3]{2}]$ ?

#### Вариант 2.

1. Образует ли группу множество чисел  $G = \{a\sqrt{5} \mid a \in Q\}$  относительно сложения чисел?
2. В группе подстановок  $S_3$  построить циклическую подгруппу, порожденную подстановкой  $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  и найти порядок этого элемента.
3. Является ли множество  $K = \left\{ \frac{x}{2^n} \mid x, n \in Z, n \geq 0 \right\}$  кольцом относительно операций сложения и умножения чисел?
4. Доказать, что  $1 + 2\sqrt{5}$  ассоциирован с  $-8 + 3\sqrt{5}$  в кольце  $Z[\sqrt{5}]$ .

#### Темы 8-9.

##### Вариант 1.

1. Найти линейное представление НОД многочленов:  
 $f(x) = x^6 - x^5 + x^4 + x^2 - x - 1$ ,  $g(x) = x^5 + x^3 + x$ .
2. Пользуясь схемой Горнера, вычислить значение многочлена  $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x - 10$  и всех его производных при  $x = 2$ .
3. При каких  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x) = x^5 + 2x^4 + ax^2 + bx + 5$  имеет число  $-1$  корнем не ниже второй кратности?
4. Найти все рациональные корни уравнения  $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4 = 0$ .
5. Найдите остаток от деления многочлена  $f(x) = x^{2015} + x^{2016} + x^{2017}$  на  $x^2 - 1$ .

##### Вариант 2.

1. Запишите многочлен  $2(x-2)^4 + 5(x-2)^3 - 7(x-2)^2 + 5(x-2) + 7$  по степеням  $x$ .
2. Выделите кратные множители многочлена  $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ .
3. Решить уравнение по формуле Кардано:  $x^3 + 3ix^2 - 3(1+2i)x + 10 - 5i = 0$ .
4. Найти все рациональные корни многочлена:  $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ .
5. Многочлен  $f(x)$  при делении на  $x+1$  и на  $x+2$  даёт одинаковые остатки, равные 2. Найдите остаток от деления данного многочлена на  $x^2 + 3x + 2$ .

#### Темы 10-11.

##### Вариант 1.

1. Вычислить значение симметрического многочлена  $(x_1 + x_2)^3 + (x_2 + x_3)^3 + (x_3 + x_1)^3$  от корней уравнения  $x^3 - 2x + 2 = 0$ .
2. Решить систему  $\begin{cases} xy + x + y = 9, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$
3. Освободиться от иррациональности в знаменателе выражения  $\frac{9}{1 - 3\sqrt[4]{2} + \sqrt{2}}$ .

##### Вариант 2.

1. Найти значение многочлена  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - x_2^2 x_3^2 - x_1^2 x_3^2 - x_1^2 x_2^2$  от корней уравнения  $2x^3 + x - 1 = 0$ .

2. Решить систему 
$$\begin{cases} xy + x + y = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

3. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби  $\frac{\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$ , где  $\alpha$  – корень многочлена  $x^4 + 8x + 2$ .

## **4.2. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

По дисциплине предусмотрен экзамен в 1, 2 семестрах. Экзамен проходит по билетам. В каждом билете содержится один теоретический вопрос и одна задача. Экзамен проводится в устной, письменной или компьютерной форме. Оценивается владение материалом, его системное освоение, способность применять нужные знания, навыки и умения при анализе проблемных ситуаций и решении практических заданий.

### **4.2.1. Устный или письменный ответ на вопрос**

#### **4.2.1.1. Порядок проведения и процедура оценивания.**

Устный или письменный ответ на вопрос направлен на проверку знаний основных разделов алгебры.

#### **4.2.1.2. Критерии оценивания.**

##### **17-20 баллов ставится, если обучающийся:**

В ответе качественно раскрыл содержание темы. Ответ хорошо структурирован. Прекрасно освоены понятийный аппарат. Продемонстрирован высокий уровень понимания материала. Превосходное умение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения.

##### **14-16 баллов ставится, если обучающийся:**

Основные вопросы темы раскрыты. Структура ответа в целом адекватна теме. Хорошо освоены понятийный аппарат. Продемонстрирован хороший уровень понимания материала. Хорошее умение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения.

##### **11-13 баллов ставится, если обучающийся:**

Тему частично раскрыл. Ответ слабо структурирован. Понятийный аппарат освоен частично. Понимание отдельных положений из материала по теме. Удовлетворительное умение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения.

##### **0-10 баллов ставится, если обучающийся:**

Тему не раскрыл. Понятийный аппарат освоен неудовлетворительно. Понимание материала фрагментарное или отсутствует. Неумение формулировать свои мысли, обсуждать дискуссионные положения.

#### **4.2.1.3. Оценочные средства.**

##### **Вопросы для устного или письменного ответа:**

##### **1 семестр.**

1. Алгебраические системы и алгебры.
2. Свойства бинарной алгебраической операции.
3. Определение и примеры групп.
4. Свойства групп.
5. Подгруппы.
6. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп.
7. Определение, примеры и свойства колец.
8. Определение, примеры и свойства полей.
9. Алгебраическая форма комплексных чисел. Комплексно-сопряженные числа.
10. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними.
11. Тригонометрическая форма комплексных чисел. Переход из алгебраической формы в тригонометрическую.
12. Умножение, деление, и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме.
13. Извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме.
14. Операции над матрицами и их свойства.
15. Обратная матрица. Группа обратимых матриц.
16. Невырожденные матрицы и их свойства.
17. Элементарные преобразования матрицы.
18. Вычисление обратной матрицы.
19. Перестановки.
20. Подстановки.

21. Определитель квадратной матрицы.
22. Основные свойства определителей.
23. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке и столбцу.
24. Необходимые и достаточные условия вырожденности квадратной матрицы.
25. Формула для вычисления обратной матрицы с помощью определителей.
26. Ранг матрицы и его вычисление.
27. Определение и примеры векторных пространств.
28. Свойства векторных пространств.
29. Свойства линейной зависимости систем векторов.
30. Базис и ранг системы векторов.
31. Базис и размерность векторного пространства.
32. Основные понятия теории систем линейных уравнений.
33. Метод Гаусса.
34. Метод Крамера.
35. Критерий совместности системы линейных уравнений.
36. Однородная система линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
37. Связь между базисами конечномерного пространства.
38. Изоморфизм векторных пространств.
39. Операции над подпространствами.
40. Скалярное умножение и его свойства.
41. Ортогональность в евклидовом пространстве.
42. Нормированность в евклидовом пространстве.
43. Ортогональное дополнение.
44. Линейные отображения и линейные операторы.
45. Матрица линейного оператора.
46. Операции над линейными операторами.
47. Образ и ядро линейного оператора.
48. Невырожденные линейные операторы.
49. Собственные векторы и собственные значения.
50. Характеристические корни.
51. Линейные операторы с простым спектром. Приведение матрицы к диагональному виду.

## **2 семестр.**

1. Множества с бинарными алгебраическими операциями.
2. Определение группы.
3. Свойства группы.
4. Примеры групп.
5. Подгруппы.
6. Циклические подгруппы. Порядок элемента группы.
7. Циклические группы.
8. Смежные классы.
9. Теорема Лагранжа.
10. Нормальные делители группы.
11. Фактор-группа.
12. Изоморфизмы групп.
13. Гомоморфизмы групп.
14. Определение кольца. Примеры колец.
15. Свойства колец. Подкольцо.
16. Отношение делимости в кольцах.
17. Область целостности.
18. Обратимые, ассоциированные элементы кольца.
19. Простые и составные элементы.
20. Главные идеалы.
21. Идеалы кольца.
22. Кольцо главных идеалов. НОД.
23. Евклидовы кольца.
24. Кольцо многочленов от одной переменной. Степень многочлена и ее свойства.
25. Корни многочлена. Теорема Безу.
26. Деление многочлена на двучлен. Схема Горнера.
27. Теорема о делении многочленов с остатком.
28. НОД многочленов. Алгоритм Евклида. Свойства НОД многочленов.
29. Многочлены, неприводимые над полем и их свойства.
30. Разложение многочленов в произведение нормированных неприводимых множителей и его единственность.
31. Формальная производная многочлена. Формула Тейлора.

32. Неприводимые кратные множители многочлена. Кратные корни многочлена.
33. Основная теорема алгебры. Следствия основной теоремы алгебры.
34. Многочлены, неприводимые над полем действительных чисел. Свойства корней.
35. Решение уравнений 3-4 степени. Формула Кардано. Метод Феррари.
36. Критерий неприводимости Эйзенштейна.
37. Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.
38. Кольцо многочленов от нескольких переменных как кратное трансцендентное расширение. Свойства кольца многочленов от нескольких переменных. Степень.
39. Лексикографическое упорядочение. Высший член многочлена и его свойства.
40. Кольцо симметрических многочленов. Свойства симметрических многочленов.
41. Основная теорема о симметрических многочленах.
42. Формулы Виета. Следствие основной теоремы о симметрических многочленах.
43. Результант. Исключение неизвестных из системы двух уравнений с двумя неизвестными.
44. Алгебраические и трансцендентные элементы. Минимальный многочлен и его свойства.
45. Простое алгебраическое расширение поля и его строение. Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби.
46. Составное алгебраическое расширение поля.
47. Поле алгебраических чисел и его алгебраическая замкнутость.

#### **4.2.2. Решение задачи.**

##### **4.2.2.1. Порядок проведения и процедура оценивания.**

Предлагаются задачи на проверку умений решать типовые задачи алгебры.

##### **4.2.2.2. Критерии оценивания.**

**26-30 баллов ставится, если обучающимся:**

Задание выполнено полностью и правильно.

**21-25 баллов ставится, если обучающимся:**

Задание выполнено полностью, но нет достаточного обоснования. Или при верном решении допущена вычислительная ошибка или недочет, не влияющий на правильную последовательность рассуждений.

**21-25 баллов ставится, если обучающимся:**

Задание выполнено частично или с фактическими и вычислительными ошибками.

**0-16 баллов ставится, если обучающимся:**

Задание не выполнено или выполнено с большим количеством фактических и вычислительных ошибок.

##### **4.2.2.3. Оценочные средства.**

**1 семестр.**

1. Образует ли группу множество чисел вида  $a + b\sqrt{5}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  относительно сложения чисел?
2. Решить уравнение относительно действительных неизвестных  $x, y$ :  $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$ .
3. Решить уравнение  $(3 + i)x^2 + (1 - i)x - 6i = 0$ .
4. Вычислить  $\frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$ .
5. Вычислить  $\sqrt{8 + 6i}$ .
6. Вычислить  $\sqrt[7]{\frac{(-1 + i\sqrt{3})^5 (2 - 2i)^3}{(\sqrt{3} - i)^4}}$ .
7. Выразить  $\cos 3x, \sin 3x, \operatorname{tg} 3x$  через  $\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x$ , используя формулу Муавра.
8. Найти вектор  $x$  из уравнения  $3(a_1 - x) + 2(a_2 + x) = 5(a_3 + x)$ , где  $a_1 = (2, 5, 1), a_2 = (10, 1, 5), a_3 = (4, 1, -1)$ .

9. Вычислите алгебраическое дополнение элемента  $a_{21}$  определителя 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & -10 \end{vmatrix}$$
.

10. Вычислите обратную матрицу двумя способами: (а) методом присоединенной матрицы; (б) методом

элементарных преобразований:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ .

11. Найти общее решение системы линейных уравнений 
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

12. Исследовать систему уравнений и найти общее решение в зависимости от значения параметра  $\lambda$ :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases}$$

13. Найти ранг матрицы 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
.

14. Найти координаты вектора  $a = (5, 1, -3)$  в базисе  $e_1 = (1, 2, 0), e_2 = (2, 0, -1), e_3 = (1, -1, 0)$ .

15. Найти фундаментальную систему решений: 
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

16. Является ли линейно зависимой или линейно независимой система векторов  $a_1 = (5, 4, 3), a_2 = (3, 3, 2), a_3 = (8, 1, 3)$ ?

17. Решите систему линейных уравнений двумя способами: (а) по правилу Крамера; (б) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 6 \\ 4x + y - 4z = -6 \end{cases}$$

18. Совместна ли система уравнений 
$$\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ x + 3y - z = 2, \\ x - 5y + 5z = 1 \end{cases}$$

1. Найти координаты вектора  $a = (5, 1, -3)$  в базисе  $e_1 = (1, 2, 0), e_2 = (2, 0, -1), e_3 = (1, -1, 0)$ .

2. Найти базис и ранг системы векторов  $a_1 = (1, 1, 4, 2), a_2 = (1, -1, -2, 4), a_3 = (-3, -1, 3, 4), a_4 = (0, 2, 6, -2), a_5 = (-1, 0, -4, -7)$ .

3. Найти вектор  $x$  из уравнения  $3(a_1 - x) + 2(a_2 + x) = 5(a_3 + x)$ , где  $a_1 = (2, 5, 1), a_2 = (10, 1, 5), a_3 = (4, 1, -1)$ .

4. Найти размерность и базис линейной оболочки системы векторов  $a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (2, 6, 5, 10), a_3 = (3, 8, 9, 13), a_4 = (6, 16, 17, 27)$ .

5. Найти матрицу перехода от базиса  $b_1 = (4, -1), b_2 = (5, -1)$  пространства  $R^2$  к базису  $a_1 = (1, 7), a_2 = (1, 6)$ .

6. Дана матрица перехода от одного базиса к другому  $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  и координаты вектора  $a = (2, 1, -2)$  в

первом базисе. Найти координаты вектора  $a$  во втором базисе

7. Найти размерности суммы и пересечения двух подпространств:  $L_1$ , натянутого на векторы  $a_1, a_2, a_3$  и  $L_2$ , натянутого на векторы  $b_1, b_2, b_3$ :

$a_1 = (1, 2, 1, -1), a_2 = (2, 3, 1, 0), a_3 = (1, 2, 2, -3), b_1 = (1, 1, 1, 1), b_2 = (1, 0, 1, -1), b_3 = (1, 3, 0, -4)$ .

8. Найти ортогональный базис подпространства  $L$ , натянутого на систему векторов  $\bar{a}_1 = (2, 2, 2, 2), \bar{a}_2 = (4, 0, 4, 0), \bar{a}_3 = (3, 1, 5, 2)$ .

9. Дополнить систему векторов  $a_1, a_2$  до ортогонального базиса пространства  $R^4$ :  $a_1 = (1, -2, 1, 3), a_2 = (2, 1, -3, 1)$ .

10. Линейный оператор  $\varphi$  в базисе  $\bar{a}_1 = (1, 0); \bar{a}_2 = (0, 1)$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ , линейный оператор  $\psi$  в

базисе  $\bar{b}_1 = (4, 2); \bar{b}_2 = (7, 4)$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу линейного оператора  $\varphi + \psi$  в базисе

$\bar{b}_1, \bar{b}_2$ .

11. Найдите матрицу линейного оператора, переводящего векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  соответственно в  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  относительно некоторого ортогонального базиса, где  $\bar{a}_1 = (1, 1), \bar{b}_1 = (1, 2), \bar{a}_2 = (0, 1), \bar{b}_2 = (2, 1)$ .

12. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе

матрицей  $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ .

## 2 семестр.

1. Образует ли группу множество чисел  $G = \left\{ \frac{x}{3^n} \mid x, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$  относительно умножения чисел?

2. Образует ли группу множество чисел  $G = \{a\sqrt{5} \mid a \in \mathbb{Q}\}$  относительно сложения чисел?

3. Доказать, что множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ , является кольцом относительно операций сложения и умножения матриц.

4. Доказать, что  $1 + 2\sqrt{5}$  ассоциирован с  $-8 + 3\sqrt{5}$  в кольце  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ .

5. Найти НОД и НОК многочленов  $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1,$

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

6. Убедиться, что многочлены  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2,$  взаимно простые и найти такие многочлены  $g(x) = x^2 - x + 1$

$u(x), v(x)$ , чтобы выполнялось равенство  $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$ .

7. Разложить на простейшие дроби рациональное выражение  $\frac{x^3 + 2x - 3}{(x + 3)^4}$ .

8. Разложить по степеням  $x$  многочлен  $f(x + 3)$ , где  $f(x) = x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 2$ .

9. Найти делитель  $g(x)$ , если известны делимое  $f(x)$ , частное  $q(x)$  и остаток  $r(x)$ :

$$f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 1,$$

$$q(x) = x^2 + 3x + 1,$$

$$r(x) = 63x + 25.$$

10. Выделить кратные множители многочлена  $f(x) = x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72$ .

11. Разложить по степеням  $x + 2$  многочлен  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ . Вычислить его значение и значения всех производных при  $x = -2$ .

12. Разложить многочлен  $f(x) = x^3 + 9x^2 + 9x + 8$  на неприводимые множители над  $C$ .

13. Зная, что многочлен  $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5$  имеет корень  $-2 + i$ , найти остальные его корни.

14. Найти все целые корни многочлена  $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30$ .

15. Найти все рациональные корни многочлена  $f(x) = 6x^6 - x^5 - 23x^4 - x^3 - 2x^2 + 20x - 8$ .

16. Найти рациональные корни многочлена  $f(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ .

17. Найти значения параметра  $m$ , при которых многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют общий корень:

$$f(x) = x^3 + mx + 1, \quad g(x) = x^2 + mx + 1.$$

18. Выразить симметрический многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2 \quad \text{через основные симметрические многочлены } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3.$$

19. Найти многочлен 3-й степени со старшим коэффициентом  $a_0 = 2$ , если его корни  $x_1, x_2, x_3$  удовлетворяют

$$\text{условиям: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 2, \quad \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_3} = 4, \quad \frac{1}{x_1x_2x_3} = 8.$$

20. Вычислить значение симметрического многочлена

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \quad \text{от корней многочлена } x^3 - x^2 + 2x + 1.$$

### Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Направление подготовки: 44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Профиль подготовки: Математика и физика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

#### Основная литература:

1. Глухов, М. М. Алгебра : учебник для вузов / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 608 с. — ISBN 978-5-507-49133-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/379334> (дата обращения: 18.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебник для вузов / А. Г. Курош. — 26-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 432 с. — ISBN 978-5-507-52215-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/440306> (дата обращения: 18.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Фаддеев, Д. К. Задачи по высшей алгебре : учебник / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. — 17-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 288 с. — ISBN 978-5-8114-0427-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210164> (дата обращения: 18.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Войтенко, Т. Ю. Введение в алгебру. Задачи и решения : учебное пособие / Т. Ю. Войтенко, Е. Н. Яковлева. - 2-е изд., стер. - Москва : ФЛИНТА, 2017. - 148 с. - ISBN 978-5-9765-2986-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1090481> (дата обращения: 18.02.2025). — Режим доступа: по подписке.

#### Дополнительная литература:

1. Цыбуля, Л. М. Алгебра: основные структуры алгебры, линейная алгебра. Курс лекций : учебное пособие / Л. М. Цыбуля, Е. Е. Ширшова. — Москва : МПГУ, 2022. — 112 с. — ISBN 978-5-4263-1058-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/252896> (дата обращения: 18.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Окунев, Л. Я. Высшая алгебра : учебник / Л. Я. Окунев. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 336 с. — ISBN 978-5-8114-0910-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210326> (дата обращения: 18.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Окунев, Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре : учебное пособие / Л. Я. Окунев. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-0900-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210329> (дата обращения: 18.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Туганбаев, А. А. Алгебраические структуры : учебник для вузов / А. А. Туганбаев. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 164 с. — ISBN 978-5-507-48163-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/394511> (дата обращения: 18.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

**Перечень информационных технологий, используемых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Направление подготовки: 44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Профиль подготовки: Математика и физика

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Год начала обучения по образовательной программе: 2025

Освоение дисциплины (модуля) предполагает использование следующего программного обеспечения и информационно-справочных систем:

Kaspersky Endpoint Security для Windows

Office Professional Plus 2010

Электронная библиотечная система «ZNANIUM.COM»

Электронная библиотечная система Издательства «Лань»

Электронная библиотечная система «Консультант студента»